Cours n°1

QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE ?

1- Un catalogue de formes ?

Question naïve… Reportons-nous à un auteur contemporain, le philosophe américain Hilary Putnam : *Nous commencerons par nous demander ce* qu'est *la logique, et essaierons de voir ensuite en quoi il existe un problème philosophique la concernant. Nous pourrions essayer de nous enquérir de " la logique " en examinant diverses définitions de ce terme, mais ce serait une mauvaise idée. Les différentes définitions existantes conduisent en effet, d'une manière ou d'une autre, à un amalgame de descriptions circulaires et d'inexactitudes. Au lieu de cela, nous examinerons la logique en elle-même.*

Si nous considérons la logique de cette manière, nous remarquons tout d'abord que, comme toutes les autres sciences, elle subit des changements - et quelquefois, des changements rapides. À d'autres époques que la nôtre, les logiciens ont eu des idées très différentes sur l'étendue de leur discipline, ses méthodes propres, etc. À l'heure actuelle, son champ est défini beaucoup plus largement que par le passé, puisque la logique telle que certains logiciens la conçoivent en vient à inclure toutes les mathématiques pures. En outre, les méthodes utilisées aujourd'hui dans la recherche en logique sont presque exclusivement des méthodes mathématiques. Néanmoins, certains aspects de la logique subissent apparemment peu de changements. Une fois établis, les résultats de la logique semblent à jamais demeurer corrects et acceptés comme tels; c'est donc que la logique change, non pas dans le sens où, au cours des siècles, nous acceptons des principes logiques incompatibles, mais au sens où le style et la notation utilisés pour représenter ces principes logiques varient considérablement, et au sens également où le domaine réservé à la logique tend à devenir de plus en plus vaste.

Il semble donc judicieux de commencer par examiner quelques-uns de ces principes que les logiciens ont pratiquement acceptés depuis ses origines. L'un de ces principes consiste en la validité de l'inférence suivante :

(1) *tous les S sont M*
tous les M *sont* P
(donc) *tous les S sont* P

Un autre de ces principes est la Loi d'Identité :

(2) x *est identique à* x

*Un autre encore stipule l'*inconsistance *de la proposition suivante :*

(3) p et *(non* p)

Un dernier principe enfin reconnaît la validité de la proposition :

(4) p ou (non p)

Ici, Putnam discute des diverses interprétations que l'on peut donner à de tels principes. Ainsi,

On considère traditionnellement que l'inférence (1) est valide pour tous les termes S, M *et* P. *Mais qu'est-ce qu'un* terme *? Les textes de logique contemporaine précisent habituellement que (1) est valide pour n'importe quelles extensions de* classes *que puissent désigner les lettres* S, M et P. *L'inférence (1) devient juste une façon de dire que si une classe* S *est une sous-classe d'une classe M, et que* M *est à son tour une sous-classe d'une classe* P, *alors* S *est une sous-classe de* P. *En résumé, selon son interprétation moderne, (1) exprime simplement la transitivité de la relation "être une sous-classe de ". On est donc fort loin de la conception que pouvaient avoir les logiciens classiques lorsqu'ils parlaient de "Lois de la Pensée " et de "termes ". Nous touchons ici à l'une des choses qui prête à confusion dans la science de la logique; même si un principe semble n'avoir subi aucun changement au cours des siècles - nous écrivons toujours*

tous les S sont M
tous les M sont P
(donc) *tous les* S *sont* P-,

l'interprétation *de cette vérité "immuable " a, en fait, considérablement évolué. Et ce qui est pire, il existe encore une controverse au sujet de ce que peut bien être l'interprétation " correcte " de ce principe.* [...]

Néanmoins, tous ces désaccords sur des points délicats ne doivent pas conduire à masquer le fait que tous les logiciens (même ceux qui vécurent à des époques différentes) sont d'accord sur l'essentiel. Tous sont d'accord, par exemple, sur le fait que des deux prémisses

Tous les hommes sont mortels
Tous les mortels sont insatisfaits *on puisse validement inférer :*
Tous les hommes sont insatisfaits,

et ce, même s'ils sont parfois en désaccord sur la formulation *proprement dite du principe général qui est à la base de cette inférence. De manière analogue, tous les logiciens s'accordent à dire que, s'il existe une chose telle que "la Tour Eiffel ", alors*

La Tour Eiffel est identique à la Tour Eiffel.

De même, s'il existe une chose telle que "la terre ", alors

La terre est ronde ou la terre n'est pas ronde.

Tout ceci, même s'ils ne sont pas d'accord sur l'exposition des principes respectifs à l'œuvre dans ces différents cas. Il existe *donc bien un corpus de "doctrine permanente " en logique; mais l'on ne peut guère investiguer très loin dans ce sens, tout au moins quand on en vient à la recherche d'un exposé exact et universellement acceptable de ses principes généraux.* (Hilary Putnam, Philosophie de la logique, trad.)

Qu'on me pardonne cette citation un peu longue. Ce que je veux montrer c'est qu'il y a en effet une certaine façon de concevoir la logique comme un corpus de doctrine permanente au cours du temps, une somme immuable de principes qui n'auraient guère changé depuis Aristote, malgré les reformulations éventuelles, c'est-à-dire l'utilisation de diverses notations plus ou moins rébarbatives, et surtout malgré l'introduction massive de mathématiques dans leur formulation. En son temps, Kant lui-même considérait que la logique était achevée et que depuis Aristote rien ne s'était produit d'important. Un érudit du XIXème siècle se serait probablement exprimé de la même façon. Or, ce que je veux montrer dans ce cours, c'est que cela n'est pas vrai. Certes Kant ne pouvait pas le savoir puisque les bouleversements dont nous allons parler se sont produits à partir de la fin du XIXème siècle seulement, puis de manière encore plus radicale dans les années soixante, en plein XXème siècle, et que de tels bouleversements se produisent encore de nos jours. Pour montrer cela, il nous faut repasser par les chemins de l'histoire de la discipline, afin d'établir un contraste entre une conception ancienne, très malmenée aujourd'hui, de la logique, et une conception contemporaine où la logique joue pleinement son rôle de discipline mathématique apte à modéliser (en un sens vague pour l'instant) des phénomènes scientifiques (et pas seulement des raisonnements).

Putnam, dans le texte cité, a l'air de considérer que la logique est une somme de principes sur lesquels tout le monde s'accorde, autrement dit un catalogue de formes. C'est bien ainsi en effet qu'elle était considérée dans le monde grec et à l'époque médiévale, deux grandes époques de réflexion sur la logique. Un article paru récemment dans un numéro des dossiers « Pour la Science » rappelle à quel point les discussions sur la logique (on disait alors « analytique ») étaient abondantes dans la Grèce antique, au point qu'un certain Callimaque (315-240 avant notre ère) s'exaspérait de cela et écrivait dans un poème satirique : « tu entends ? même les corbeaux qui croassent sur les toits s'enquièrent : « qu'est-ce qu'une implication logique ? » ». On distinguait à vrai dire deux branches : la « rhétorique » et la « dialectique ». La première s'occupait du discours en continu et la seconde des discussions, avec questions et réponses, autrement dit des dialogues. Les jeux étaient nombreux dans ce qu'on appelait la *disputatio*. A l'époque médiévale, où cette forme de logique fut particulièrement en l'honneur dans la formation des moines, qui étaient les érudits de l'époque, les tests et examens prenaient souvent l'aspect de jeux (jeu de l'*Obligatio*). Il s'agissait pour l'élève interrogé de rester cohérent dans les réponses données à une suite de questions. Le jeu en question peut se formuler ainsi (van Benthem) :

Un certain nombre de tours est choisi, représentant la sévérité de l'examen. Le professeur donne à l'élève successivement une suite d'assertions P1, …, Pn que l'élève doit « accepter » ou « rejeter » au fur et à mesure. S'il accepte, l'assertion correspondante est ajoutée à son stock courant d'obligations, s'il rejette, c'est la négation de l'assertion correspondante qui est ajoutée. L'élève réussit son examen s'il peut rester cohérent du début à la fin.

Par exemple imaginons les trois assertions successives :

(1) $B \vee \neg (A \vee C)$

(2) $A \rightarrow B$

(3) $\neg B \vee C$

Si vous répondez OUI à (1), alors vous devez répondre OUI à (2), et vous pouvez répondre aussi bien OUI que NON à (3), mais si vous répondez NON à (1), vous pouvez répondre OUI ou NON à (2), mais dans les deux cas, vous devez répondre OUI à (3).

Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur cette notion de jeu car elle fait de nouveau partie du paysage des travaux en logique, après une longue éclipse : c'est une certaine manière de comprendre les principes de la logique, qui peut déboucher sur des applications importantes dans notre monde contemporain dans le domaine de l'interaction (qu'il s'agisse de l'interaction entre individus socialisés ou de l'interaction entre machines dans les réseaux informatiques).

C'est Xénocrate (mort en 314 avant J-C) qui a donné son nom à la logique. Ce mot « provient de l'adjectif grec logikos, logikê au féminin, dérivé de logos, qui signifie à la fois « raison », « langage » et « raisonnement » ». Est donc logique ce qui est rationnel, ce qui relève du langage ou ce qui est raisonné.

Quant à Aristote, c'est lui qui « théorise » pour la première fois les règles qui permettent de tirer des conclusions valides à partir d'arguments. La proposition est un énoncé susceptible d'être vrai ou faux, et elle se décompose en un sujet et un prédicat. « Socrate est mortel » est un exemple de proposition, elle se décompose en un sujet (la partie de l'énoncé qui exprime ce sur quoi il porte) : « Socrate » et un prédicat (la partie qui indique ce que l'on dit du sujet) : « mortel ». Cette décomposition est ce qui fait fonctionner un raisonnement tel que :

Tout homme est mortel,

Socrate est un homme

Donc Socrate est mortel

En effet le premier énoncé exprime un lien entre deux prédicats, le deuxième est une proposition classique, avec pour sujet « Socrate ». La première proposition permet de transférer le premier prédicat nommé vers le second et d'obtenir finalement une proposition qui porte toujours sur « Socrate » mais où le prédicat a été modifié.

Une innovation fondamentale chez Aristote consiste à symboliser par des lettres les termes des propositions : c'est de cette manière qu'on peut dégager une forme. Ainsi, au lieu d'exemplifier les formes de déduction autorisées, au moyen d'illustrations comme :

Toutes les plantes à larges feuilles sont des plantes à feuilles caduques,

Toutes les vignes sont des plantes à larges feuilles,

Donc : toutes les vignes sont des plantes à feuilles caduques

Aristote énoncera directement la forme de raisonnement valide donnée au début de ce chapitre et empruntée à la citation de Putnam, à savoir :

Si tous les S sont M

Et si tous les M sont P,

Alors tous les S sont P

Les lettres sont d'authentiques « variables » autrement dit des symboles destinés à être substitués au moyen de n'importe quels « termes » (nous reverrons ces notions, formalisées dans le langage moderne, plus loin) (ici des noms communs ou des syntagmes[1] comme « plante à larges feuilles » ou « plante à feuilles caduques »).

La logique aristotélicienne nous intéresse de par l'abstraction dont elle fait déjà preuve. Aristote fait reposer la validité d'un raisonnement sur un enchaînement de formes. On peut donc bien parler à son propos déjà de « logique formelle ». On peut comparer celle-ci à une autre logique qui se développe à une époque voisine en Inde, mais qui n'a sa forme écrite qu'à partir du 2ème siècle de notre ère, dans les *Nyaya-sutra*. Elle est elle aussi basée au départ sur la méthodologie de la discussion, et joue donc un rôle important vers les 5ème et 6ème siècles dans les débats entre Brahmanistes, Jaïnistes et Bouddhistes.

Dans la forme achevée des Nyayas-sutra, l'exemple classique de raisonnement est le suivant :

Proposition : il y a du feu sur la montagne

Raison : parce qu'il y a de la fumée sur la montagne

Exemple : comme dans une cuisine, et pas sur un lac

Application : il en est ainsi

Conclusion : donc il y a du feu

Le raisonnement apparaît formé de cinq parties, et non de trois comme cela est le cas chez Aristote, c'est que le logicien indien intègre toujours exemple et contre-exemple à sa démonstration. Ce qui est abstraction chez le philosophe grec est exemplification chez le logicien indien. Plus tard, le sage bouddhiste Dignaga ramènera le nombre de parties à trois, sans toutefois obtenir le type de forme abstraite qui fait l'intérêt du syllogisme.

Dans les *Premiers Analytiques*, Aristote offre une théorie du syllogisme qui demeurera connue et enseignée jusqu'à l'époque moderne (et beaucoup discutée au Moyen-Âge, d'après les traductions dont celle de Boèce). Les syllogismes sont des suites de trois propositions de quatre types, codés par les lettres : A, E, I, O. A signifie « universelle affirmative », du genre « tout X est M », E signifie « universelle négative », du genre : « aucun X n'est M », I signifie « particulière affirmative », du genre : « quelque X est M » et O signifie « particulière négative », du genre : « quelque X n'est pas M ». Par exemple, si nous avons deux universelles affirmatives qui se suivent : « tous les S sont M » et « tous les M sont P », alors on déduit une nouvelle universelle affirmative : « tous les S sont P ». Bien sûr, de la suite formée par deux particulières affirmatives : « quelque S est M » et « quelque M est P », on ne peut rien déduire. D'une suite formée d'une particulière affirmative : « quelque S est M » et d'une universelle affirmative : « tous les M sont P », ne peut résulter qu'une particulière affirmative : « quelque S est P » etc. Ainsi seulement certains arrangements possibles utilisant trois des lettres parmi les quatre représentent-ils des syllogismes corrects. Aristote les inventorie et les médiévaux utiliseront des moyens mnémotechniques pour les désigner : des noms latins comportant les voyelles incriminées.

Ainsi la suite « AAA » (dont on a vu plus haut qu'elle était une forme admise) est-elle exprimée par le mot BARBARA, la suite « EAE » par le mot CELARENT et ainsi de suite. Aristote distingue 19 formes réparties en quatre figures :

1ère figure : BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO

2ème figure : CESARE, CAMESTRES, FESTINO, BAROCO

[1] On notera qu'ici, les difficultés commencent : est-ce bien des « syntagmes nominaux » qui se substituent aux variables ? ce qui signifierait que la logique est une partie de la linguistique, ou bien est-ce autre chose ? mais quoi alors ? les objets désignés par ces syntagmes ? certainement pas, on ne voit pas une vraie plante verte venir occuper la place laissée vide par l'effacement d'une variable ! Des logiciens diront : la « signification » de ces noms et ces groupes nominaux, encore qu'on ne soit pas très assuré de savoir ce que l'on entend par là… les « mathématiciens » diront : des classes. En effet « plantes à larges feuilles » désigne une classe d'objets (ou un ensemble). Mais c'est là conférer une existence aux objets « classes » et entrer dans une escalade en matière d'ontologie qui débouche sur la question finale : est-ce que les entités mathématiques existent vraiment ?

3ème figure : DARAPTI, FELAPTON, DISAMIS, DATISI, BOCARDO, FERISON

4ème figure : BAMALIP, CALEMES, DIMATIS, FESAPO, FRESION

Les logiciens médiévaux continueront la tradition en donnant des règles pour d'autres conditions de validité d'une conséquence. Par exemple, de « tout homme est un animal », on peut déduire « quelque homme est un animal »[2], et de « un homme court », on peut déduire « un animal court », mais il importe de voir que le but des logiciens, de l'Antiquité comme des temps médiévaux, se limite à donner des répertoires de formes correctes et des « trucs » pour éviter les erreurs de raisonnement.

De la même façon, seront produits des catalogues d'erreurs de raisonnement ou « arguments fallacieux » (en anglais « fallacies »). De tels recueils sont parfois encore utilisés aujourd'hui : on en trouve sur le Net.

[2] Ceci sera révisé par la logique contemporaine postérieure à Frege : s'il n'y a pas d'homme dans l'univers, « tout homme est un animal » est vrai, alors que « quelque homme est un animal » (« il existe un homme qui est un animal ») est faux, mais ceci nécessite d'avoir reconnu la place d'une classe vide dans le système logique.