

QUELQUES POINTS DE MATHÉMATIQUES EN REGARD AVEC LA PHILOSOPHIE

ANNEXE I

‘Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know we are talking about, nor whether what we are saying is true’ (Bertrand Russell, in *International Monthly*, 1901, p. 84).

‘Pure mathematics consists entirely of asseverations to the effect that, if such and such a proposition is true of anything, then such and such another proposition is true of that thing. It is essential not to discuss whether the first proposition is really true, and not to mention what the anything is, of which it is supposed to be true. Both these points would belong to applied mathematics. We start, in pure mathematics, from certain rules of inference, by which we can infer that if one proposition is true, then so is some other proposition. These rules of inference constitute the principles of formal logic. We then take any hypothesis that seems assuring, and deduce its consequences. If our hypothesis is about anything, and not about some one or more particular things, then our deductions constitute mathematics. Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true. People who have been puzzled by the beginnings of mathematics will, I hope, find comfort in this definition, and will probably agree that it is accurate.’ (ib., p. 83-84).

‘La mathématique pure est complètement indifférente aux choses actuelles, et se trouve indépendante de la nature de ce qui existe. Donc elle peut être exacte, quelle que soit la nature du flux sensible’ (Bertrand Russell, in *Bulletin de la Société française de Philosophie*, 23 mars 1911, 3, p. 39).

ANNEXE II

- Je le suis.
 - Or ce par quoi tu sais, est-ce ce par quoi tu es un homme qui sait, ou est-ce par autre chose ?
 - C'est ce par quoi je suis un homme qui sait. Car j'imagine que tu veux parler de l'âme ; n'est-ce pas ce que tu veux dire ?
 - Socrate ! s'écria-t-il, n'as-tu pas honte ? Interroger alors qu'on t'interroge !
 - Bon, répondis-je, mais comment dois-je faire ? Car je ferai ce que tu me commanderas : quand je ne saisis pas ce que tu me demandes, me commandes-tu de répondre tout de même, sans poser d'autre question ?
 - **Tu saisis sans doute bien quelque chose de ce que je dis ? répliqua-t-il.**
 - Oui, en effet, répondis-je.
 - Alors, réponds à ce que tu saisis.
 - Que dis-tu donc ? Si toi, en me posant ta question, tu as telle idée en tête, mais si moi, j'en saisis une autre, et si je réponds à celle que j'ai saisie, **cela-te suffit-il, si je ne réponds en rien à ce qui est en question ?**
 - **A moi, cela me suffit, répliqua-t-il, mais non à toi, j'imagine !**
 - En ce cas non, par Zeus ! m'écriai-je. Je ne répondrai pas avant de savoir ce qu'on me demande !
 - Tu ne répondras pas, dit-il, à ce que tu pourras saisir de chacune de mes questions, parce que tu n'arrêtes pas de faire le bavard et tu es plus antique qu'il n'est permis !
- Je compris alors qu'il était fâché contre moi, parce que je cherchais à démêler ses propos, au lieu que lui voulait faire le chasseur en me prenant au piège de ses mots. Alors je me rappelai Connos ; lui aussi se fâche contre moi chaque fois que je ne lui cède pas, et ensuite je ne l'intéresse plus beaucoup, parce qu'il me considère comme incapable d'apprendre. Mais puisque j'avais alors l'intention de suivre aussi le cours d'Euthydème, je pensai devoir lui céder, de peur que, me ...

(Platon, *Euthydème*, 295b-d, trad. M. Canto)

ANNEXE III

- En ce cas, c'est pareil pour Chérédème, répliqua-t-il : étant autre qu'un père, il ne saurait être père !

- Il a bien l'air, répondis-je, de ne pas être père !

- Sans aucun doute ! car si Chérédème est père, dit Euthydème en intervenant, de nouveau, c'est le tour de Sophronisque : étant autre qu'un père, il n'est pas père ; si bien que toi, Socrate, tu es sans père !

Ctésippe, alors, rattrapa la balle :

- Et votre père, à son tour, s'écria-t-il, ne lui est-il pas arrivé la même chose ? est-il autre que mon père ?

- Il s'en faut de beaucoup, vraiment ! rétorqua Euthydème.

- Mais, c'est le même ? demanda Ctésippe.

- Le même, assurément.

- Je ne saurais l'admettre ! Mais au fait, Euthydème, est-il seulement mon père, ou est-il celui des autres hommes aussi ?

- Des autres aussi, affirma-t-il. T'imagines-tu que te même homme, tout en étant père, ne soit pas père ?

- C'est bien ce que je m'imaginai, répondit Ctésippe.

- Que dis-tu ? répliqua-t-il. Ne pas être de l'or, tout en étant en or ? ne pas être homme, tout en étant un homme !

- Attention, Euthydème ! s'écria Ctésippe ; comme on dit, tu n'attaches pas « le fil au fil » ? parce que tu dis une chose terrible, si ton père est le père de tout le monde !

- Mais il l'est, déclara Euthydème.

- Des hommes ? demanda Ctésippe, ou bien aussi des chevaux et de tous les autres animaux ?

- De tout le monde, répondit-il.

- Et ta mère, est-elle aussi leur mère ?

- Oui, elle est leur mère aussi.

- Elle est donc aussi la mère des hérissons, ta mère, et des hérissons de mer, des oursins ?

- Oui, et la tienne aussi ! dit-il.

- Alors tu es toi aussi, le frère des goujons [ou encore des petits veaux], des petits chiens et des petits cochons ?

- Oui, tout comme toi ! répliqua-t-il.

(Platon, *Euthydème*, 298a-d)

ANNEXE IIIbis

- Et, en outre, tu as aussi un chien pour père.
- Oui, comme toi !
- Eh bien, c'est tout de suite, Ctésippe, renchérit Dionysodore, si tu me réponds, que tu vas convenir de cela. Dis-moi donc : as-tu un chien ?
- Oui, et tout à fait méchant, répondit Ctésippe.
- A-t-il donc des petits chiens ?
- Oui, et tout à fait dans le même genre que lui, répondit-il.
- Leur père est-il donc ce chien ?
- Ce qui est sûr, c'est que je l'ai vu couvrir la chienne, assura-t-il.
- Alors le chien, est-il à toi ?
- Oui, absolument, dit-il.
- C'est donc un père à toi, si bien que ce chien est ton père, et que toi, tu es le frère des petits chiens.

Dionysodore, à son tour, reprit précipitamment la parole, pour empêcher Ctésippe de parler avant lui :

- A moi encore, oui, une petite réponse, dit-il : ce chien, le bats-tu ?
Et Ctésippe en riant
- Oui, par les dieux ! s'écria-t-il, faute de pouvoir te battre toi !
- C'est donc ton propre père que tu bats, répliqua Dionysodore.
- Toutefois il serait beaucoup plus juste, répondit Ctésippe, que je batte votre père à vous ! Où a-t-il donc appris à engendrer des fils aussi savants ? Mais sans doute, Euthydème, a-t-il de votre savoir tiré beaucoup de biens, ce père, qui est le vôtre et celui des petits chiens !
 - Mais il n'a pas besoin de beaucoup de biens, Ctésippe - ni toi, ni cet homme-là !
 - Et toi non plus, Euthydème? demanda-t-il.
 - Non plus qu'aucun autre homme! Car dis-moi, Ctésippe, estimes-tu que c'est un bien, pour un malade, de boire un remède quand il en a besoin, ou que ce n'est pas un bien ? ou encore, quand on part pour la guerre, est-ce un bien d'y aller avec des armes, plutôt que sans armes?

(Platon, *Euthydème*, 298d-299b)

ANNEXE IV

divers individus, ou classes d'individus, il existe des relations, nous pouvons constituer un nouveau corps de doctrine logique. Prenons pour exemple la **relation binaire, celle qui s'établit entre un couple d'individus ou un couple de classes, par exemple père et fils, nous obtiendrons pour base** de ce calcul considération des couples qui vérifient cette relation. Les symboles logiques 1 et 0 désigneront, l'un l'ensemble de tous les couples, l'univers des relations ; l'autre, l'absence de tout couple, le néant de relation. Ainsi conçue l'idée de relation est une forme nouvelle de l'idée d'extension logique ; elle permet d'appliquer une troisième fois les procédés opératoires d'expansion et d'élimination. Mais la spécificité de l'idée de la relation apparaît dans les caractères originaux de certains modes opératoires. **Quand on intervertit l'ordre des couples, on change une relation en une relation inverse ; certaines relations sont identiques à leur inverse : relation de frère ou d'ami (relation symétrique),** tandis que d'autres sont **irréversibles**, comme la relation de père (relation *asymétrique*). Ou encore, quand on compose les relations les unes avec les autres, on obtient un produit relatif. Par sa nature la multiplication relative n'est pas commutative, à la différence de la multiplication logique ; on ne peut pas confondre le frère du père et le père du frère, l'ami du bienfaiteur et le bienfaiteur de l'ami. De ce point de vue, le cas essentiel à mettre en lumière est celui où le produit relatif de la relation par elle-même est identique à cette relation : tandis que l'ami de notre ami n'est pas nécessairement notre ami, le frère de notre frère est notre frère ; la relation de fraternité est transitive, suivant l'expression introduite par de Morgan¹. Ces exemples suffisent à montrer qu'il entre dans la logique des relations des caractéristiques nouvelles qui la rendent indépendante de la logique des classes ; et il n'est pas sans intérêt philosophique de consacrer cette indépendance en introduisant, comme l'a fait M. Russell², un symbole spécial R : xRy signifiera qu'il existe une relation entre x et y. De la sorte, au lieu de se borner à définir des relations par des classes, comme le faisaient encore C. S. Peirce et Schröder, on pourra définir des classes par des relations³.

1. Voir son mémoire de 1850: On the symbols of logic, etc. Transactions of the Cambridge philosophical Society, t. IX, 1856, p. 104. La *symétrie* s'y trouve aussi définie sous le nom de *convertibilité*.

2. Russell, *The principles of mathematics*, vol. 1, Cambridge, 1903, §28, p. 24.

3. Couturat, *Les principes des mathématiques*, 1905, p. 27 et suiv.

(L. Brunschvicg, Logique des propositions et logique des relations, *Les étapes de la philosophie mathématiques*, p. 379).

ANNEXE V

SOCRATE

Le pieux est donc ce qui plaît aux dieux, Euthyphron, et non pas ce qui leur est profitable ou cher.

EUTHYPHRON

Je crois, pour ma part, que c'est par-dessus tout ce qui leur est cher.

SOCRATE

En ce cas, le pieux est à nouveau, semble-t-il, ce qui est cher aux dieux.

EUTHYPHRON

Oui, par-dessus tout.

SOCRATE

Et tu t'étonnes, toi qui tiens ce langage, si tes arguments donent l'impression qu'ils ne tiennent pas en place et qu'ils se promènent ? Et tu m'accuses d'être le Dédale qui les fait se promener, alors que toi tu es beaucoup plus habile que Dédale, puisque tu les fais tourner en rond ! A moins que tu ne te rendes pas compte que notre argument, après avoir décrit un cercle est revenu au même point ? Car tu te souviens sans doute que le pieux et l'aimé-des-dieux nous ont précédemment paru, non pas identiques, mais différents l'un de l'autre Euthyphron. Ne t'en souviens-tu pas ?

(Platon, *Euthyphron*, 15b-c, trad. L.A. Dorion)

ANNEXE VI

et la logistique l'a dégagé avec raison comme constitutif de l'identité d'un nombre tel que douze. Mais ce faisant, la logistique a complètement perdu de vue la relation de prédicat à sujet qui était à la base de la logique aristotélicienne ; tournant autour de la notion de classe comme autour d'un pivot, elle s'est éloignée du réalisme ontologique pour se borner à la description d'un processus psychologique.

Cette conclusion nous semble confirmée par la conception que la logistique s'est faite du nombre 1 : « Si x et y sont membres d'une classe non nulle, et si $x = y$, la classe est singulière. »¹ Telle est la définition logique du nombre 1. Cette définition n'enferme pas, nous dit-on, de cercle vicieux : pour que l'on ait devant soi deux entités distinctes, telles x et y , il n'est pas nécessaire qu'elles soient comptées. Seulement l'observation n'est légitime qu'à la condition qu'on abandonne le point de vue ontologique. De ce point de vue en effet x et y ne sauraient être distinguées que si elles constituent des entités distinctes ; or, elles ne peuvent constituer des entités distinctes puisqu'elles ne sont qu'une seule et même réalité. La contradiction disparaît dès que l'on se résigne à introduire cette notion de l'esprit que M. Russell, avec une témérité quelque peu dogmatique, commence par déclarer *totally irrelevant*². Au lieu d'entités nécessairement immuables, nous n'aurons affaire qu'à des phases successives de la représentation, que l'affirmation de l'unité singulière aura précisément pour fonction d'identifier. L'identité numérique de x et de y signifie qu'à deux représentations distinctes correspond une seule et même chose. Et c'est bien là le travail que l'esprit accomplit effectivement pour parvenir à cette conclusion qu'il n'y a qu'un *soleil*, qu'une *lune*, en dépit des différences inhérentes aux images multiples que le soleil et la lune donnent d'eux-mêmes à travers le cours des périodes astronomiques et la diversité des circonstances météorologiques. Comme le dit excellemment M. Frege, « la découverte que c'était un même soleil et non un soleil nouveau, qui se levait chaque matin, est bien l'une des plus fécondes que l'astronomie ait faites³ ». La logistique, en transcrivant dans ses symboles le résultat d'une semblable découverte, ne fait qu'enregistrer le processus de l'activité intellectuelle.

1. *The principles*, § 128, p. 132. Cf. Couturat, *Pour la logistique*, Revue de métaphysique, 1906, p. 227.

2. *The principles*, p. 4.

3. *Ueber Sinn und Bedeutung*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. t. C, 1892, p. 25.

(L. Brunschvicg, Les difficultés du réalisme des classes in, *Les étapes des la philosophie mathématique*, p. 405)

ANNEXE VII

PARMÉNIDE

A ton avis, Socrate, demanda Parménide, de quelle manière les autres choses participeront-elles donc aux Formes, si ce n'est ni en parties ni en totalité?

SOCRATE

Certes, par Zeus, avoua Socrate, il ne me paraît pas aisé de trancher en telle matière de quelque façon que ce soit.

PARMÉNIDE

Eh bien sur le point que voici, comment réagis-tu ?

SOCRATE

Sur quel point ?

PARMÉNIDE

Voici, j'imagine, à partir de quelle considération tu en viens à poser que chaque Forme est une. Chaque fois que plusieurs choses te paraissent être grandes, c'est, je suppose, une seule Forme, qui t'apparaît être la même, lorsque tu les embrasses toutes du regard ; voilà pourquoi tu estimes que le Grand est unique.

SOCRATE

Tu dis vrai, répondit-il.

PARMÉNIDE

Eh bien, le Grand en soi et ces autres choses que sont les choses grandes, suppose que, de la même façon, avec les yeux de l'âme, tu les embrasses toutes du regard. N'est-ce pas que de nouveau apparaîtra quelque chose d'unique qui est grand, et en vertu de quoi ces mêmes choses dans leur ensemble apparaîtront nécessairement grandes?

SOCRATE

Il semble bien.

PARMÉNIDE

C'est donc une autre Forme de Grandeur qui va faire son apparition, s'étendant sur la Grandeur en soi et sur les choses qui participent de cette Forme, ce qui revient à dire que, en plus de la Grandeur en soi et des choses qui en participent, il y aura encore une Forme, différente, en vertu de laquelle la Grandeur en soi et les choses qui en participent seront grandes. Par suite, chacune de tes Formes ne sera désormais plus une, mais elle se multipliera sans limite.

SOCRATE

A moins, Parménide, rétorqua Socrate, que chacune de ces Formes ne soit une pensée, et que nulle part ailleurs que dans les âmes il ne convienne qu'elle ne vienne à l'existence. De la sorte en effet, chaque Forme serait une chose une et n'aurait plus à subir les difficultés de tout à

l'heure.

PARMÉNIDE

En ce cas, répliqua Parménide, chacune de ces pensées est une chose, mais ce n'est la pensée de rien?

SOCRATE

Mais c'est impossible, s'écria Socrate.

PARMÉNIDE

C'est donc la pensée de quelque chose?

(Platon, *Parménide*, 131e-132b, G.F., trad. L. Brisson)

ANNEXE VIII

PARMÉNIDE

Voici, j'imagine, à partir de quelle considération tu en viens à poser que chaque Forme est une. Chaque fois que plusieurs choses te paraissent être grandes, c'est, je suppose, une seule Forme, qui t'apparaît être la même, lorsque tu les embrasses toutes du regard ; voilà pourquoi tu estimes que le Grand est unique.

SOCRATE

Tu dis vrai, répondit-il.

PARMÉNIDE

Eh bien, le Grand en soi et ces autres choses que sont les choses grandes, suppose que, de la même façon, avec les yeux de l'âme, tu les embrasses toutes du regard. N'est-ce pas que de nouveau apparaîtra quelque chose d'unique qui est grand, et en vertu de quoi ces mêmes choses dans leur ensemble apparaîtront nécessairement grandes ?

SOCRATE

Il semble bien.

PARMÉNIDE

C'est donc une autre Forme de Grandeur qui va faire son apparition, s'étendant sur la Grandeur en soi et sur les choses qui participent de cette Forme, ce qui revient à dire que, en plus de la Grandeur en soi et des choses qui en participent, il y aura encore une Forme, différente, en vertu de laquelle la Grandeur en soi et les choses qui en participent seront grandes. Par suite, chacune de tes Formes ne sera désormais plus une, mais elle se multipliera sans limite.

SOCRATE

A moins, Parménide, rétorqua Socrate, que chacune de ces Formes ne soit une pensée, et que nulle part ailleurs que dans les âmes il ne convienne qu'elle ne vienne à l'existence. De la sorte en effet, chaque Forme serait une chose une et n'aurait plus à subir les difficultés de tout à l'heure.

PARMÉNIDE

En ce cas, répliqua Parménide, chacune de ces pensées est une chose, mais ce n'est la pensée de rien ?

SOCRATE

Mais c'est impossible, s'écria Socrate.

PARMÉNIDE

C'est donc la pensée de quelque chose ?

SOCRATE

Oui.

PARMÉNIDE

De quelque chose qui est, ou de quelque chose qui n'est pas ?

SOCRATE

De quelque chose qui est.

PARMÉNIDE

La pensée de quelque chose qui est un, n'est-ce pas, c'est-à-dire de quelque chose que cette pensée considère comme s'étendant sur toute une série de chose, tout en restant une espèce unique ?

SOCRATE

Oui.

PARMÉNIDE

Ne sera-ce pas une Forme que cette chose qui sera pensée comme une, puisqu'elle restera toujours la même en s'étendant sur toute une série de choses ?

SOCRATE

Une fois de plus, c'est nécessaire.

PARMÉNIDE

Mais quoi, poursuit Parménide, étant donné la façon dont, declares-tu, les autres choses participent des Formes, n'est-il pas nécessaire d'admettre cette alternative : ou bien chaque Forme est constituée de pensées et chacune pense, ou bien ce sont des pensées qui ne pensent pas ?

SOCRATE

Eh bien, cette solution-là, reprit Socrate, n'est pas raisonnable non plus. Mais voici, Parménide, ce qui me semble, à moi, être la meilleure explication. Alors que ces Formes sont comme des modèles qui subsistent dans leur nature, les autres choses entretiennent avec elles un rapport de ressemblance et en sont les copies ; en outre, la participation que les autres choses entretiennent avec les Formes n'a pas d'autre explication que celle-ci : elles en sont les images.

PARMÉNIDE

Si donc, reprit-il, quelque chose ressemble à une Forme, cette Forme peut-elle ne pas être semblable à ce qui lui ressemble, dans la mesure où l'image en question entretient avec cette Forme un rapport de ressemblance ? Ou est-il quelque moyen par lequel le semblable puisse ne pas être semblable au semblable ?

SOCRATE

Il n'y en a point.

PARMÉNIDE

Mais n'est-il pas absolument nécessaire que ce qui est semblable participe à une seule et même Forme ?

SOCRATE

Certainement.

PARMÉNIDE

Et ce en vertu de quoi, du fait qu'elles y participent, sont semblables les choses qui sont semblables, n'est-ce pas cette Forme même ?

SOCRATE

C'est tout à fait cela.

PARMÉNIDE

Par suite, rien ne peut être semblable à cette Forme et cette Forme ne peut être semblable à autre chose. Si tel n'est pas le cas, au-delà de cette Forme une autre Forme toujours surgira. Et si cette dernière se trouve ressembler à quelque chose, une autre Forme surgira encore, et jamais ne cessera l'apparition d'une Forme chaque fois nouvelle, à supposer que cette Forme soit semblable à ce qui en participe.

SOCRATE

Ce que tu dis est on ne peut plus vrai.

PARMÉNIDE

Ce n'est donc point en vertu de la ressemblance que les autres choses participent aux Formes.

SOCRATE

Apparemment.

PARMÉNIDE

Tu vois donc Socrate, répondit-il, dans quelle grande difficulté on se trouve, si on définit les Formes comme des réalités en soi.

SOCRATE

Bien sûr.

PARMÉNIDE

Sache bien cependant, reprit-il, que, si je puis dire, tu ne mesures pas encore bien l'ampleur de la difficulté qui surgit, si pour définir quelque chose tu fais l'hypothèse, en la posant comme quelque chose à part, qu'il y a toujours une Forme unique pour chacune des choses.

(Platon, *Parménide*, 131e-133b, G.F., trad. L. Brisson)

ANNEXE IX

L'ÉTRANGER

[Nous ferions la même faute] que si, entreprenant de diviser en deux le genre humain, on faisait la division à la façon dont la font la plupart des gens d'ici : en détachant les Grecs comme unité mise à part de tout le reste, tandis qu'à l'ensemble de toutes les autres races, alors qu'elles sont en nombre indéterminé et qu'elles ne se mêlent pas les unes avec les autres ni ne parlent la même langue ils appliquent la dénomination unique de « Barbare », s'attendant que, à leur appliquer une seule et même dénomination, ils en aient fait un seul genre. Ou encore, c'est comme si l'on se figurait diviser le nombre en deux espèces en détachant le nombre « dix mille » de tous les autres, en le mettant à part comme si c'était une seule espèce, et qu'on prétende que, à mettre sur absolument tout le reste un nom unique, cela suffise cette fois encore pour mettre à part un second genre du nombre. Or, la division serait je suppose mieux faite et on diviserait mieux selon les espèces et en deux, si on partageait le nombre en « pair » et « impair » et si on partageait de même le genre humain en « mâle » et en « femelle », tandis qu'on ne mettrait à part de tout le reste les Lydiens, les Phrygiens ou n'importe quel autre groupe que lorsqu'il n'y aurait plus moyen de trouver une division dont chacun des deux termes fût à la fois genre et partie.

(Platon, *Le Politique*, 262d-e, G.F., trad. L. Brisson et J.F. Pradeau).