Logique : la théorie formelle des syllogismes

Marcel Crabbé

Les traditions se perdent. La théorie des syllogismes n'a pas plus d'intérêt pour le logicien contemporain que n'en a, par exemple, l'alchimie pour le chimiste.

Cependant, contrairement à l'alchimie et à d'autres sciences anciennes dites dépassées, la théorie formelle du syllogisme n'est pas fausse, elle est seulement extrêmement limitée et pauvre en regard des développements de la logique contemporaine. Le logicien actuel, qui ne s'intéresse pas à l'histoire de son domaine, ne la traite au mieux que comme un exercice élémentaire[1].

1 La logique chez Aristote

La logique d'Aristote aborde des problèmes très variés. Les écrits qui reçurent le titre général d'**Organon** (Instrument) constituent une initiation à ses textes scientifiques et philosophiques. L'*Organon* comprend les **Catégories** (énumération des rubriques sous lesquelles on peut classer les différentes propriétés d'un objet ou d'un individu), le traité **De l'interprétation** (analyse des énoncés et de leurs relations), les **Analytiques**, se subdivisant en Premiers analytiques (théorie du syllogisme) et en Seconds analytiques (théorie de la démonstration en science), les **Topiques** (théorie de l'argumentation à partir des prémisses plus ou moins probables) et les **Réfutations sophistiques**.

Seuls *De l'interprétation* et les *Premiers analytiques* relèvent de la logique proprement dite. Cette logique s'est scolarisée au cours des temps et surtout au Moyen Âge. Une série de manuels et de traités ont eu pour effet de mécaniser la démarche du philosophe. Une tradition s'est ainsi progressivement constituée. Elle a eu, jusqu'à l'avènement de la logique contemporaine, une influence considérable.

Nous donnerons un aperçu rapide de la partie minimale de cette tradition.

[1]Pour un jugement plus nuancé, nous renvoyons à notre article « The Formal Theory of Syllogisms », *The Review of Modern Logic* **9** n^{o}1–2, 2001–2003, pp. 29–52.

2 Les jugements

La théorie des syllogismes explicite essentiellement les rapports entre des énoncés de la forme :

A : Tout S est P
E : Aucun S n'est P
I : Quelque S est P
O : Quelque S n'est pas P

Ces énoncés sont aussi appelés 'propositions' ou 'jugements' ou 'jugements catégoriques' ou 'jugements catégoriques à sujet général'.

S et P sont les **termes** des énoncés. Le premier terme d'un énoncé est appelé 'terme du sujet', 'attribut du sujet', 'concept du sujet' ou plus simplement, par abus de langage, 'sujet', le sujet étant en réalité le sujet grammatical, savoir 'tout S', 'aucun S', 'quelque S'. Le second terme est aussi appelé 'prédicat'. Cette terminologie induit une confusion inoffensive entre nature et fonction : le mot 'terme' renvoie à la nature des expressions, alors que 'sujet' et 'prédicat' désignent leurs fonctions.

L'étude des liens entre ces énoncés comprend deux aspects : les inférences immédiates et les syllogismes ou raisonnements médiats.

3 Les inférences immédiates

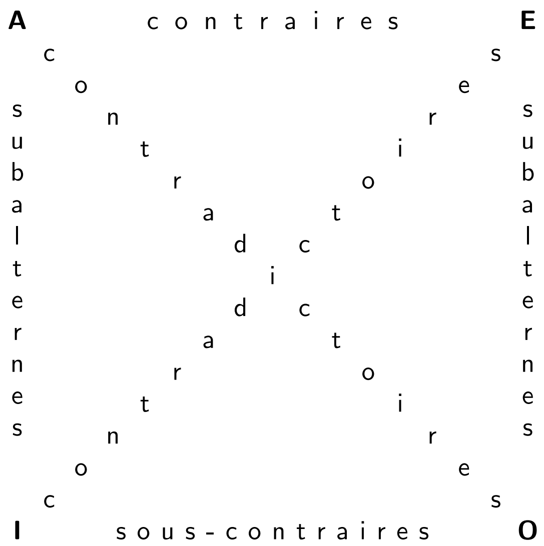
Les inférences, dites immédiates, règlent le passage de la vérité ou de la fausseté d'un énoncé à la vérité ou la fausseté d'un autre énoncé.

3.1 Inférences immédiates découlant du carré logique

Quelques-unes des inférences immédiates sont contenues implicitement dans le carré logique ; il s'agit de la contradiction, de la contrariété, de la sous-contrariété et de la subalternation.

Le carré logique schématise les relations fondamentales entre les quatre types de jugements. Deux énoncés **contraires** ne peuvent être simultanément vrais, mais bien simultanément faux. Deux énoncés **sous-contraires** ne peuvent être simultanément faux, mais bien simultanément vrais. Deux énoncés **contradictoires** ne peuvent être ni simultanément vrais ni simultanément faux.

Le carré logique



3.1.1 Contradiction

$$\frac{\text{Il est vrai que tout } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que aucun } S \text{ n'est } P}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ n'est pas } P}{\text{Il est faux que tout } S \text{ est } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que tout } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ est } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ n'est pas } P}{\text{Il est vrai que tout } S \text{ est } P}$$

3.1.2 Contrariété

$$\frac{\text{Il est vrai que tout } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que aucun } S \text{ n'est } P}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est faux que tout } S \text{ est } P}$$

3.1.3 Sous-contrariété

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ n'est pas } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ est } P}$$

3.1.4 Subalternation

$$\frac{\text{Il est vrai que tout } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ est } P}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que tout } S \text{ est } P}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ n'est pas } P}{\text{Il est faux que aucun } S \text{ n'est } P}$$

3.2 Les conversions

Les **conversions** ne sont pas mentionnées dans le carré logique. Elles consistent à passer de la vérité d'un énoncé à la vérité d'un énoncé résultant de celui-ci par permutation de l'ordre de ses termes et éventuellement d'altération de sa « quantité » (auquel cas la conversion est « imparfaite »).

3.2.1 Conversion parfaite

La conversion parfaite n'est possible que sur les énoncés E et I (simpliciter feci).

$$\frac{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est vrai que aucun } P \text{ n'est } S}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que quelque } P \text{ est } S}$$

$$\frac{\text{Il est faux que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est faux que aucun } P \text{ n'est } S}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que quelque } P \text{ est } S}$$

3.2.2 Conversion imparfaite

La conversion imparfaite fonctionne seulement avec des énoncés A et E, car elle consiste alors en une subalternation suivie d'une conversion parfaite ou en une conversion parfaite suivie d'une subalternation (Eva per accidens).

$$\frac{\text{Il est vrai que tout } S \text{ est } P}{\text{Il est vrai que quelque } P \text{ est } S}$$

$$\frac{\text{Il est vrai que aucun } S \text{ n'est } P}{\text{Il est vrai que quelque } P \text{ n'est pas } S}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ est } P}{\text{Il est faux que tout } P \text{ est } S}$$

$$\frac{\text{Il est faux que quelque } S \text{ n'est pas } P}{\text{Il est faux que aucun } P \text{ n'est } S}$$

3.3 L'obversion

Une **obversion** consiste à inférer la vérité d'un énoncé S — non P de la vérité d'un énoncé S — P ou réciproquement. Les obversions n'interviennent pas dans la théorie formelle usuelle, mais elles sont des outils pour la mise en forme de phrases des langues naturelles. Elles permettent, par exemple, de transformer une phrase négative en une phrase affirmative : 'Aucun Gantois n'est wallon' en 'Tout Gantois est non wallon'.

'Tout S est P' équivaut à 'Aucun S n'est non P'. 'Aucun S n'est P' équivaut à 'Tout S est non P'. 'Quelque S est P' équivaut à 'Quelque S n'est pas non P'. 'Quelque S n'est pas P' équivaut à 'Quelque S est non P'.

3.3.1 La conversion par contraposition

Si, comme dans le cas des obversions, on s'autorise des modifications des termes, on peut ajouter deux nouvelles conversions, par contraposition. Une obversion d'un énoncé A, suivie d'une conversion parfaite et d'une nouvelle obversion redonne un énoncé A contraposé. Il en va de même pour les énoncés O (Asto per contrapositionem)[2].

Donc, 'Tout S est P' équivaut à 'Tout non P est non S' et 'Quelque S n'est pas P' équivaut à 'Quelque non P n'est pas non S'.

4 Les syllogismes

Un syllogisme est un raisonnement constitué de deux prémisses : la majeure et la mineure ; de trois termes — le terme majeur (ou grand extrême), le terme mineur (ou

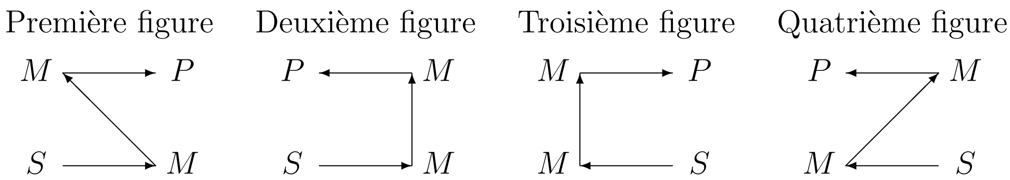
[2] Simpliciter feci convertitur, Eva per accid, Asto per contrap, sic fit conversio tota.

petit extrême) et le moyen terme — et d'une conclusion. Le moyen terme n'apparaît pas dans la conclusion mais bien dans chacune des prémisses. Le premier terme de la conclusion est le mineur et le second est donc le majeur. La majeure contient le terme majeur et la mineure le terme mineur[3]. La majeure s'écrit avant la mineure.

Cette définition suffit dans les cas usuels mais elle pose problème lorsque, par exemple, un même terme est moyen terme et mineur. A-t-on affaire alors à un ou à deux termes ?

4.1 Les figures

Selon la disposition des termes dans les prémisses, on distingue quatre **figures** de syllogisme. Dans la première figure, le moyen terme est le premier terme de la majeure et le second terme de la mineure. Dans la deuxième figure, le moyen terme est le second terme dans les deux prémisses. Dans la troisième figure, le moyen terme est le premier terme dans les deux prémisses. Enfin, dans la quatrième figure, le moyen terme est le second terme de la majeure et le premier terme de la mineure.



▷ *Jusqu'à la fin du Moyen Âge, on ne distinguait pratiquement que trois figures, en groupant la première et la quatrième. On a attribué à tort la création de la quatrième figure à Galien. Le problème de l'existence ou non de cette dernière figure a fait l'objet de longues polémiques qui persistent jusque dans le Vocabulaire de Lalande. La querelle porte essentiellement sur la question de savoir s'il faut privilégier la forme, auquel cas il y aurait quatre figures, ou les procédés informels, qui vont progressivement s'identifier à des mouvements de la pensée ou de l'esprit, auquel cas il y aurait trois figures.*

Lorsqu'on ne retient que trois figures, on définit la première figure comme étant celle où le moyen terme est premier terme dans une prémisse, qui est appelée majeure, et second terme dans l'autre, qui est appelée mineure. Cette fois les

[3] Terminus esto triplex : medius, majorque, minorque. Nequaquam medium capiat conclusio oportet (Numquam contineat medium conclusio fas est). Cette définition formalise l'idée que les termes de la conclusion doivent être reliés entre eux par la médiation du moyen terme. Deux termes liés à un même troisième (moyen) sont liés entre eux ou deux termes sont déliés si l'un est lié au moyen et si l'autre en est délié : quae sunt eadem uni tertio, sunt quoque eadem inter se ; quorum unum convenit alterum ab eo discrepat, ea inter se diversa sunt.

*termes majeur et mineur sont définis à partir de leurs positions dans les prémisses et non dans la conclusion. Le majeur est le second terme de la majeure et le mineur est le premier terme de la mineure. On distingue alors les modes **directs** de la première figure, où le mineur est le premier terme de la conclusion et le majeur second terme, et les modes **indirects**, où le majeur est le premier terme et le mineur second terme de la conclusion.*

4.2 Les modes

Il y a soixante-quatre manières de ranger, avec répétitions, en une suite de trois éléments les lettres A, E, I et O. À chacun de ces arrangements correspond naturellement ce qu'on appelle un **mode** de syllogisme. Par exemple, à la suite EIA correspond la classe (le mode) de syllogismes dont la majeure est un énoncé de type E, la mineure un énoncé de type I et la conclusion un énoncé de type A.

4.3 Les formes valides

Une **forme** de syllogisme est complètement déterminée quand on connaît le mode et la figure des syllogismes de cette forme. Les syllogismes de la quatrième figure, de mode EIA ont donc une forme pouvant se représenter par :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun } P \text{ n'est } M\\ \text{Quelque } M \text{ est } S\end{array}}{\text{Tout } S \text{ est } P}$$

Il y a, par conséquent, exactement deux cent cinquante-six formes de syllogismes. On appelle souvent mode ce que nous appelons ici, par souci de rigueur, forme.

Une forme de syllogisme est **valide** si tous les syllogismes de cette forme sont des raisonnements corrects. Ainsi, la forme des syllogismes de la première figure dont le mode est AAA est valide. Par contre, la forme de l'exemple (mode EIA, quatrième figure) n'est pas valide. Dans la tradition, on admet généralement vingt-quatre formes valides de syllogisme.

Il y a deux manières d'extraire les formes valides de l'ensemble des deux cent cinquante-six formes de syllogisme.

4.3.1 La dérivation à partir des modes parfaits.

La première méthode consiste à admettre comme évidentes quatre formes de syllogisme de la première figure, celles des modes « parfaits » AAA, EAE, AII et EIO, et à démontrer à partir d'elles la validité des vingt formes restantes.

Les quatre formes de base sont désignées par les mots 'Barbara', 'Celarent', 'Darii' et 'Ferio'[4]. Chacune des autres formes valides recevra également un nom commençant par une des lettres 'B', 'C', 'D' ou 'F' et dont les trois premières voyelles sont choisies parmi 'A', 'E', 'I' et 'O'. L'ordre d'apparition des voyelles définit le mode. La première lettre signifie qu'il faut, pour démontrer la validité de la forme, admettre la forme de la première figure commençant par la même consonne. Les consonnes 's', 'p', 'm' et 'c' sont destinées à coder les étapes de la démonstration : 's' signifie qu'il faut opérer une conversion parfaite (« simpliciter ») sur l'énoncé indiqué par la voyelle qui précède, 'p' renvoie à la conversion imparfaite (« per accidens »), 'm' indique qu'il faut permuter (« mutare ») les prémisses et 'c' renvoie à une démonstration par l'absurde (« per contradictionem »). Enfin, les autres consonnes ont un rôle euphonique[5].

Exemples. *Les syllogismes en Disamis (troisième figure) sont de mode IAI. Leur forme est donc :*

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Quelque } M \textit{ est } P\\ \textit{Tout } M \textit{ est } S\end{array}}{\textit{Quelque } S \textit{ est } P}$$

Pour en démontrer la validité, on suppose que les deux prémisses sont vraies et on cherche à établir la vérité de la conclusion. Si on opère une conversion parfaite sur la majeure et si on permute les deux prémisses, on obtient à nouveau deux prémisses vraies :

$$\begin{array}{c}\textit{Tout } M \textit{ est } S\\ \textit{Quelque } P \textit{ est } M\end{array}$$

Les termes sont disposés selon la première figure (S est cette fois le majeur et P le mineur). Le Darii autorise la conclusion vraie :

$$\textit{Quelque } P \textit{ est } S$$

Une conversion parfaite garantit enfin la vérité de la conclusion du Disamis.

Les syllogismes en Baroco (deuxième figure) sont de la forme :

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Tout } P \textit{ est } M\\ \textit{Quelque } S \textit{ n'est pas } M\end{array}}{\textit{Quelque } S \textit{ n'est pas } P}$$

[4]Ces quatre formes incarnent le fameux dictum de omni et nullo qui affirme que de Tout M est P et de Aucun M n'est P, on peut conclure, respectivement, X est P et X est non P, si X est M, X étant mis pour « Tout S » (Barbara, Celarent) ou « Quelque S » (Darii, Ferio). DICTUM DE OMNI : quidquid universaliter dicitur de aliquo subjecto, dicitur de omni quod sub tali subjecto continetur. (Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis.) DICTUM DE NULLO : quidquid universaliter negatur de aliquo subjecto, dicitur de nullo quod sub tali subjecto continetur. (Quidquid de nullo valet, nec de quibusdam et singulis valet.)

[5]s vult simpliciter verti, p vero per accid, m vult mutari, c per impossibile duci.

Cette forme de syllogisme présente avec la forme Bocardo (troisième figure) la particularité d'exiger une démonstration par l'absurde (à partir du Barbara). On suppose les prémisses vraies et la conclusion fausse. Le contradictoire de la conclusion est donc vrai. Les deux énoncés :

$$\begin{array}{c} \textit{Tout } P \textit{ est } M \\ \textit{Tout } S \textit{ est } P \end{array}$$

peuvent alors servir de prémisses à un Barbara qui donne comme conclusion vraie :

$$\textit{Tout } S \textit{ est } M$$

Le contradictoire de cet énoncé est faux. Il se trouve que c'est la seconde prémisse du Baroco, qui a été supposée vraie ! L'hypothèse de la non validité du Baroco n'est donc pas tenable[6].

Les principales formes valides sont appelées :

1. Barbara, Celarent, Darii, Ferio ;
2. Cesare, Camestres, Festino, Baroco ;
3. Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison ;
4. Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

La première figure comprend en outre Barbari et Celaront ; la seconde Cesaro et Camestrop et la quatrième Calemop. Ces cinq formes sont appelées « subalternes » car on les obtient en appliquant la subalternation à la conclusion des formes Barbara, Celarent, Camestres et Calemes. Nous désignerons les formes syllogistiques par ces noms standards.

Barbara

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Tout } S \text{ est } P \end{array}$$

Barbari

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Celarent

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Aucun } S \text{ n'est } P \end{array}$$

Celaront

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Darii

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Quelque } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Ferio

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\ \text{Quelque } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

[6] Ce raisonnement *baroque* serait l'une des origines de ce mot.

Cesare

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } P \text{ n'est } M \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Aucun } S \text{ n'est } P \end{array}$$

Cesaro

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } P \text{ n'est } M \\ \text{Tout } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Camestres

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Aucun } S \text{ n'est } M \\ \hline \text{Aucun } S \text{ n'est } P \end{array}$$

Camestrop

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Aucun } S \text{ n'est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Festino

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } P \text{ n'est } M \\ \text{Quelque } S \text{ est } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Baroco

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Quelque } S \text{ n'est pas } M \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

***

Darapti

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Felapton

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Disamis

$$\begin{array}{c} \text{Quelque } M \text{ est } P \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Datisi

$$\begin{array}{c} \text{Tout } M \text{ est } P \\ \text{Quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Bocardo

$$\begin{array}{c} \text{Quelque } M \text{ n'est pas } P \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Ferison

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } M \text{ n'est } P \\ \text{Quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

***

Bamalip

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Calemes

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Aucun } M \text{ n'est } S \\ \hline \text{Aucun } S \text{ n'est } P \end{array}$$

Calemop

$$\begin{array}{c} \text{Tout } P \text{ est } M \\ \text{Aucun } M \text{ n'est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Dimatis

$$\begin{array}{c} \text{Quelque } P \text{ est } M \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ est } P \end{array}$$

Fesapo

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } P \text{ n'est } M \\ \text{Tout } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Fresison

$$\begin{array}{c} \text{Aucun } P \text{ n'est } M \\ \text{Quelque } M \text{ est } S \\ \hline \text{Quelque } S \text{ n'est pas } P \end{array}$$

Exercice. *Montrez qu'on peut réduire les quatre formes parfaites de syllogisme, Barbara, Celarent, Darii, Ferio, à deux d'entre elles en utilisant la conversion parfaite et la contradiction.*

$\triangleright$ *On trouve également d'autres appellations. Ainsi, Celaront se nomme aussi Celaro ; Camestrop, Camestros ; Calemes, Camenes ; Calemop, Calemos, Camenop ou Camenos ; Dimatis, Dimaris, Dibatis ou Diratis. Les logiciens de Port-Royal, n'ayant cure du sens des lettres 's', 'p', 'm', ont introduit pour la quatrième figure les noms : Barbari, Calentes, Dibatis, Fespamo, Fresisom.*

Si on ne reconnaît que trois figures et qu'on remplace les syllogismes de la quatrième figure par les syllogismes indirects de la première figure, on adopte les noms suivants : Baralipton($\pm$ Bamalip), Celantes ($\pm$ Calemes), Dabitis ($\pm$ Dimatis), Fapesmo ($\pm$ Fesapo), Frisesomorum ($\pm$ Fresison). À quoi il faudrait ajouter le mode subalterne Celantop, correspondant à Calemop.

$\triangleright$ *On estimait parfois, à tort, que les modes subalternes ne devaient pas être retenus, car leur conclusion est plus faible que celle que l'on peut déduire des prémisses. Par exemple, après avoir rappelé que ce qui conclut le général conclut le particulier, les logiciens de Port-Royal poursuivent en ces termes : « il faut remarquer qu'il a plu aux hommes de ne considérer les espèces de syllogismes que selon sa plus noble conclusion qui est la générale : de sorte qu'on ne compte point pour une espèce particulière de syllogisme celui où on ne conclut le particulier que parce qu'on en peut aussi conclure le général ».*

Cette façon de voir ne paraît pas justifiée car, par symétrie, on devrait alors ne pas tenir compte des formes qui utilisent des prémisses trop fortes pour la conclusion : Fesapo, par exemple, qui s'obtient à partir de Fresison en renforçant la mineure. Ces mêmes raisons, données par les auteurs de la Logique, auraient dû aussi les conduire à rejeter la subalternation, ce qui aurait rendu beaucoup de leurs démonstrations impossibles.

4.3.2 Les règles d'élimination

La seconde manière de déterminer les formes valides de syllogismes consiste à procéder par élimination des formes non valides. Pour cela, on énonce une série de règles auxquelles doivent se soumettre les syllogismes valables et on ne garde que les formes de syllogismes les respectant toutes. Pour formuler précisément ces règles, il faut enrichir quelque peu le vocabulaire technique.

On classe les énoncés de type A, E, I et O selon la « quantité » en **universels** et **particuliers** et selon la « qualité » en **affirmatifs** et **négatifs**. Sont universels les énoncés de type A et E et particuliers ceux de type I et O. Sont affirmatifs les énoncés de type A et I et négatifs ceux de type E et O[7]. Ce classement est figuré dans le tableau :

	Affirmatifs	Négatifs
Universels	A	E
Particuliers	I	O

La **quantité** d'un terme dans un énoncé est « universelle » ou « particulière », selon que l'énoncé se réfère ou non à la totalité des objets qui sont vérifiés par la propriété désignée par ce terme. La quantité n'est pas une propriété intrinsèque du terme, mais elle est liée à sa fonction dans l'énoncé : un même terme peut avoir une quantité universelle ici et particulière là. Le tableau suivant indique, pour chaque type d'énoncé, la quantité du sujet et celle du prédicat :

	A	E	I	O
Sujet	Universelle	Universelle	Particulière	Particulière
Prédicat	Particulière	Universelle	Particulière	Universelle

Ces notions étant définies, nous sommes en mesure de dresser une liste de règles suffisantes pour éliminer les syllogismes non valides. Aux règles qui concernent le nombre de termes et leur disposition, qui sont comprises dans la définition de la notion de syllogisme, on ajoute les suivantes :

Règles portant sur la quantité des termes.

R_{mt} La quantité du moyen terme doit être universelle dans une des prémisses au moins (règle du **moyen terme**) : aut semel, aut iterum medius generaliter esto. On dit aussi que le moyen terme doit être *distribué.*

R_{lh} La quantité d'un terme ne peut être universelle dans la conclusion que si elle est universelle dans la prémisse comprenant ce terme (règle du **latius hos** : latius hos quam premissae conclusio non vult).

Règles portant sur la qualité des énoncés.

R_{nn} Deux prémisses négatives ne donnent pas de conclusion : utraque si praemissa neget nil inde sequetur.

R_{n} Si une des prémisses est négative, la conclusion est négative.

R_{aa} Deux prémisses affirmatives ne donnent pas de conclusion négative : ambae affirmantes nequeunt generare negantem.

[7]Les lettres A, E, I et O proviennent pour certains des mots latins 'AffIrmo' et 'nEgO', pour d'autres elles n'étaient rien de plus que les quatre premières voyelles de l'alphabet latin. Asserit A negat E verum generaliter ambo. Asserit I negat O verum particulariter ambo.

Les deux dernières règles peuvent se formuler en une règle unique : la conclusion est négative ssi une des prémisses l'est.

Règles dérivées portant sur la quantité des énoncés.

R_{pp} Deux prémisses particulières ne donnent pas de conclusion : nil sequitur geminis e particularibus unquam.

R_{p} Si une prémisse est particulière, la conclusion est particulière.

La combinaison des règles R_{n} et R_{p} s'exprime encore comme suit : « la conclusion suit la prémisse la plus faible » : pejorem sequitur conclusio partem. On estimait, en effet, qu'une négative est plus faible qu'une affirmative et qu'une particulière est plus faible qu'une universelle. Une lecture plus étendue de cette formule, qui veut que la conclusion suit la partie la plus faible, permet de justifier également la règle du latius hos.

Dérivation de R_{pp}. Supposons que les deux prémisses sont particulières. Les sujets des prémisses sont donc pris particulièrement. Le moyen doit être universel dans une des prémisses (R_{mt}), qui sera par conséquent négative. La conclusion est donc négative (R_{n}) et les prémisses, qui sont particulières, contiennent deux termes pris universellement (R_{lh}). Elles sont donc toutes deux négatives, ce qui est impossible par R_{nn}.

Dérivation de R_{p}. Supposons qu'il y a une prémisse particulière. Le sujet de cette prémisse est donc pris particulièrement et l'autre est pris universellement (R_{pp}). Si la conclusion était universelle, le mineur serait universel dans la mineure (R_{lh}) et, comme le moyen doit être universel dans une des prémisses (R_{mt}), une des prémisses serait négative et la conclusion aussi (R_{n}). Le majeur serait dès lors universel dans la majeure (R_{lh}). Les deux prémisses seraient donc négatives, car trois termes y sont pris universellement, ce qui est interdit par R_{nn}.

En utilisant les règles concernant les énoncés, R_{nn}, R_{n}, R_{aa}, R_{pp} et R_{p}, on voit que seuls les modes AAA, AAI, AEE, AEO, AII, AOO, EAE, EAO, EIO, IAI, IEO et OAO peuvent donner des syllogismes valides. Le mode IEO est, par ailleurs, exclu par R_{lh}, car le majeur y est universel dans la conclusion et particulier dans la majeure. Il n'y a donc plus que onze modes à examiner pour obtenir tous les syllogismes valides.

Il reste maintenant à déterminer les formes valides pour chaque figure en déduisant des règles générales des règles propres aux différentes figures.

1. Pour la première figure.

$$\begin{array}{c} M \text{ —— } P \\ S \text{ —— } M \\ \hline S \text{ —— } P \end{array}$$

La majeure doit être universelle et la mineure affirmative.

En effet, si la mineure était négative, la conclusion le serait aussi (R_{n}) et le majeur serait universel (R_{lh}) dans la majeure qui serait donc aussi négative. Cela violerait R_{nn}.

Ensuite, le moyen doit être pris universellement dans une des prémisses (R_{mt}). Ce ne peut être que dans la majeure, car la mineure est affirmative. La majeure est donc universelle.

Il ne reste donc plus que les modes AAA, AAI, AII, EAE, EAO et EIO.

Le sens de la première figure est le suivant : la majeure énonce une loi universelle (affirmative ou négative) soumise à une condition, exprimée par le moyen terme, et la mineure affirme que tout ou partie du sujet vérifie la condition. La conclusion dit que tout ou partie du sujet vérifie la loi.

2. Pour la deuxième figure.

$$\begin{array}{c} P \text{ —— } M \\ S \text{ —— } M \\ \hline S \text{ —— } P \end{array}$$

La majeure doit être universelle et la conclusion négative.

En effet, une prémisse est négative (R_{mt}) et la conclusion l'est aussi (R_{n}). Le majeur est donc pris universellement dans la majeure (R_{lh}) qui est donc universelle.

Les modes qui peuvent donner des formes valables sont donc AEE, AEO, AOO, EAE, EAO, EIO.

Le sens de la deuxième figure est le suivant : la majeure énonce une loi universelle (affirmative ou négative) sous condition et la mineure énonce (négativement ou affirmativement) que tout ou partie du sujet ne vérifie pas la loi. La conclusion dit que tout ou partie du sujet ne vérifie pas la condition.

3. Pour la troisième figure.

$$\begin{array}{c} M \text{ —— } P \\ M \text{ —— } S \\ \hline S \text{ —— } P \end{array}$$

La mineure doit être affirmative et la conclusion particulière.

Si la mineure était négative, la conclusion serait négative (R_{n}) et la majeure aussi (R_{lh}), ce qui va à l'encontre de R_{nn}. Donc la mineure est affirmative et la conclusion est particulière (R_{lh}).

Les modes valides possibles sont donc AAI, AII, EAO, EIO, IAI, OAO.

4. Pour la quatrième figure, les règles sont moins suggestives.

$$\begin{array}{c} P \text{ —— } M \\ M \text{ —— } S \\ \hline S \text{ —— } P \end{array}$$

Si la majeure est affirmative, la mineure est universelle (R_{mt}). On écarte ainsi AII et AOO.

Si la conclusion est universelle, la mineure est négative (R_{lh}). Ceci écarte AAA et EAE.

Si la conclusion est négative, la majeure est universelle (R_{lh}). Ceci écarte OAO.

Les modes qui restent sont donc AAI, AEE, AEO, EAO, EIO, IAI.

On constate donc que les formes de syllogisme qui passent l'épreuve des règles d'élimination sont en fait les vingt-quatre formes valides citées précédemment.

4.4 Le présupposé d'existence

Dans l'exposé précédent, nous avons implicitement supposé que les termes utilisés désignaient des concepts vérifiés par au moins un individu ou objet. Nous avons de fait exclu des termes qui, comme 'licorne', 'martien', 'carré rond', désignent des propriétés qui ne sont attribuables à rien. Si on rejette ce présupposé d'existence, comme on le fait couramment et à juste titre dans la logique contemporaine, on pourra utiliser des énoncés comportant ce genre de termes. En ce cas toute particulière dont le sujet est un tel terme est clairement fausse : s'il n'y a pas de S, il n'y a pas de S qui est P et « Aucun S n'est P » est vraie. Plus surprenant, toute universelle ayant un sujet vide est vraie : s'il n'y a pas d'objet vérifiant S, il n'y a pas de S qui n'est pas P et « Tout S est P » est vraie. Une inférence comme la subalternation qui conclut d'une universelle à une particulière est dès lors incorrecte. On le voit clairement à partir de l'exemple suivant :

$$\frac{\text{Tout carré rond est rond}}{\text{Quelque carré rond est rond}}$$

Si on n'y prend garde, on peut ainsi, comme l'a noté Leibniz, prouver, à peu de frais, l'existence d'un être nécessaire (Dieu) :

$$\frac{\text{Tout être possédant l'existence nécessaire est possédant l'existence nécessaire}}{\text{Quelque être possédant l'existence nécessaire est possédant l'existence nécessaire}}$$

Les seules inférences immédiates qui demeurent correctes en l'absence du présupposé d'existence sont la contradiction, la conversion parfaite, l'obversion et la contraposition.

Il faut également exclure neuf des vingt-quatre formes jugées valides de syllogisme : Barbari, Celaront, Cesaro, Camestrop, Darapti, Felapton, Bamalip, Calemop et Fesapo. Les syllogismes de ces formes sont les seuls à avoir cette particularité de posséder deux prémisses universelles et une conclusion particulière. Quand on rejette le présupposé d'existence, il faut donc ajouter une nouvelle règle :

R_{uu} Deux prémisses universelles ne donnent pas de conclusion particulière.

Le nombre de formes de syllogisme valides est donc de 24, 19 ou de 15 selon le point de vue adopté.

Exercice. *À quelle figure appartient le syllogisme valide suivant :*

$$\frac{\begin{array}{c}\textit{Tout homme est homme}\\ \textit{Tout homme est homme}\end{array}}{\textit{Tout homme est homme}}$$

5 Extensions de la théorie

Outre les énoncés universels, particuliers, affirmatifs et négatifs, on peut encore répertorier, du point de vue de la quantité, les énoncés singuliers, et du point de vue de la qualité, les énoncés indéfinis ou infinis. Un énoncé singulier est un énoncé de la forme « Socrate est mortel », où le sujet est un terme singulier. Un énoncé infini est, par exemple, un énoncé comme 'Tout Brésilien est non européen'. Dire des Brésiliens qu'ils sont non européens ne dit pas ce qu'ils sont d'une manière positive, comme quand on dit qu'ils sont américains ; le jugement n'est donc pas affirmatif, il n'est pas non plus négatif car sa copule est affirmative. On remarquera que du point de vue formel, ce jugement est affirmatif, et qu'il est équivalent à un jugement négatif 'Aucun Brésilien n'est européen'. Du reste tout jugement affirmatif est équivalent, par obversion, à un jugement négatif et réciproquement : « Tout S est P » équivaut à « Aucun S n'est non P », « Quelque S n'est pas P » équivaut à « Quelque S est non P »[8].

Aristote a également jeté les premiers jalons d'une théorie des syllogismes modaux, qui a été approfondie par les logiciens médiévaux. On distingue, du point de vue de la modalité, trois types de jugements : les jugements de possibilité (problématiques) « il est possible que tout S est P », les jugements de réalité (assertoriques) « tout S est P » et les jugements de nécessité (apodictiques) « il est nécessaire que tout S est P ».

Enfin, du point de vue de la complexité, on distingue les jugements catégoriques (ou non composés d'autres jugements), hypothétiques « si A, alors B », conjonctifs « A et B », disjonctifs « A ou B », « ou bien A ou bien B », etc. La logique des jugements complexes fut d'abord l'œuvre des mégariques (Philon) et des stoïciens (Chrysippe).

[8]Pour Aristote et les scolastiques, un énoncé in(dé)fini est un énoncé dont la quantité n'est pas indiquée comme 'Le plaisir est désirable'.

On trouve aussi au Moyen Âge des développements de la logique des opérations temporelles, il sera vrai que, il a été vrai que, il sera toujours vrai que, etc. Par contre, la logique des opérateurs spatiaux (il est vrai ici que, il est vrai là que, etc.), qui n'a d'ailleurs pas de correspondant dans les conjugaisons des langues proches, semble n'avoir pas été étudiée.

Voici, à titre exemplatif, la fameuse table des jugements de la Critique de la Raison Pure, dont Kant infère ses douze catégories :

1
Quantité du jugement
UNIVERSEL
PARTICULIER
SINGULIER

2
Qualité
AFFIRMATIF
NÉGATIF
INDÉFINI

3
Relation
CATÉGORIQUE
HYPOTHÉTIQUE
DISJONCTIF

4
Modalité
PROBLÉMATIQUE
ASSERTORIQUE
APODICTIQUE

6 Utilisation de la théorie

Pour utiliser la théorie, lorsqu'on veut s'assurer de la validité d'un raisonnement, on commence par formaliser le raisonnement et puis on vérifie s'il a une forme valide.

Pour formaliser le raisonnement, il faut d'abord découvrir les deux prémisses et la conclusion. Ensuite, il faut traduire ces phrases sous forme d'énoncés A, E, I, O, en veillant à faire apparaître trois termes au plus. Dans le meilleur des cas, on se trouvera en présence d'un syllogisme. Si ce syllogisme est valide, on peut en conclure que le raisonnement initial l'est aussi ; si le syllogisme n'est pas valide, on peut en conclure soit que le raisonnement initial n'est pas valide, soit qu'il a été mal analysé.

Cette dernière situation peut être due au fait qu'on peut lui donner une autre forme syllogistique ou qu'on ne peut pas le traduire du tout en syllogisme.

Il faut remarquer que ce n'est qu'abusivement que l'on qualifie un raisonnement formulé en langage courant de Barbara, Celarent, etc. Cette qualification ne peut s'appliquer stricto sensu qu'à des syllogismes mis en forme, car il arrive souvent qu'un même raisonnement puisse être mis en forme de différentes manières.

Quand on se trouve en présence d'un raisonnement dont la conclusion déplaît, parce qu'elle est fausse par exemple, on peut soit suspecter que le raisonnement est non valide ou qu'une prémisse n'est pas vraie, soit s'incliner devant la conclusion, aussi désagréable soit-elle.

Illustrons cela par le raisonnement suivant, dont la conclusion n'est pas acceptable pour beaucoup :

$$\begin{array}{c}\text{Tout ce qui est rare est cher}\\ \text{Une chose pas chère, c'est rare}\\ \hline \text{Une chose pas chère, c'est cher}\end{array}$$

On peut montrer qu'il n'est pas valide en l'analysant comme suit :

$$\begin{array}{c}\text{Tout } M \text{ est } P\\ \text{Tout } S \text{ est } N\\ \hline \text{Tout } S \text{ est } P\end{array}$$

avec M = 'chose rare, en ce qu'elle est difficile à produire' ; P = 'chose chère' ; S = 'chose pas chère' et N = 'chose rare, en ce qu'elle est peu fréquente'. En ce cas, on estime que le mot 'rare' est ambigu. On peut de même envisager que 'cher' est ambigu, signifiant tantôt « ayant une valeur sentimentale », tantôt « ayant une valeur marchande ». Dans tous ces cas, le raisonnement « n'est pas » un syllogisme.

Si on propose ce raisonnement dans une conversation portant sur les marchandises en vente sur un marché, l'analyse pourrait être :

$$\begin{array}{c}\text{Tout } M \text{ est } P\\ \text{Tout } S \text{ est } M\\ \hline \text{Tout } S \text{ est } P\end{array}$$

avec M = 'chose rarement en vente sur ce marché', P = 'chose qui se vend cher sur ce marché' et S = 'chose qui ne se vend pas cher sur ce marché' ; il apparaît valide : c'est un Barbara.

On peut alors contester une prémisse en soutenant qu'il y a des choses rares qui ne sont pas chères, ou des choses pas chères qui ne sont pas rares.

Enfin, si cette stratégie n'est pas possible parce que les prémisses sont vraies (pour ce marché), il faut se résoudre à admettre la conclusion. Celle-ci est du reste vraie chaque fois que tout est cher.

6.1 Formalisation des énoncés

Nous nous contenterons de quelques indications.

Lorsque le prédicat grammatical est un verbe intransitif, on le remplace par 'est' suivi du participe présent ou de l'adjectif verbal : 'Tout homme respire' se traduit en 'Tout homme est respirant'.

Quand le prédicat grammatical est un groupe verbal composé d'un verbe transitif et d'un complément direct, on peut soit traiter le groupe verbal comme un simple verbe intransitif, soit opérer une transformation passive : 'Tout citadin respire un air impur' se traduit donc en 'Tout citadin est respirant un air impur' ou 'Quelque air impur est respiré par tout citadin'.

Si le sujet grammatical est une expression ayant le rôle d'un nom propre, on le remplace par un terme général (précédé de 'Tout' ou 'Quelque') et le résultat sera une universelle ou une particulière : 'Pierre est mortel' devient 'Tout individu identique à Pierre est mortel' ou 'Quelque individu identique à Pierre est mortel'[9].

Lorsque le sujet grammatical est un verbe intransitif, il est conseillé de le nominaliser en utilisant les ressources de la langue, par exemple le participe présent, l'adjectif verbal ou l'opérateur 'le fait de '. 'Écrire prend du temps' devient 'Tout écrivant est prenant du temps'.

Il faut noter que le résultat de l'analyse peut être inélégant ou lourd, mais grammaticalement correct. Il peut aussi ne pas être grammatical : 'les femmes sont mortelles' s'analyse en 'Tout femme est mortel'. Dans de tels cas, on peut soit considérer que la phrase appartient à une langue formelle et la laisser telle qu'elle, soit la corriger légèrement en accordant en genre et en nombre, en faisant précéder le prédicat de 'un' ou 'une', etc. : 'toute femme est mortelle'.

Donc, 'Socrate court' s'interprète d'abord 'Socrate est courant', puis 'Tout individu identique à Socrate est courant' ; 'Paul aime Virginie' se traduit par 'Tout individu identique à Paul est aimant Virginie' ou 'Tout individu identique à Virginie est aimé de Paul' ; 'Étudier fatigue' devient d'abord 'Étudier est fatiguant' et, ensuite, 'L'étude est fatigante', 'Toute activité identique à l'étude est fatigante' ; 'Courir implique bouger' se traduit 'Tout courant est bougeant' ou 'Toute course est mouvement'.

[9] Cette dernière interprétation était considérée comme une véritable hérésie, car, selon les Anciens, 'Pierre est mortel' parle de Pierre tout entier et doit donc être considéré comme universel.

6.2 Exemples de formalisation de raisonnements

Il n'y a de bête si féroce qu'elle ne connaisse tant soit peu la pitié. Mais je n'en connais aucune, et je ne suis donc pas une bête (Richard III, 1, 2).

C'est un Camestres :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Toute bête est connaissant la pitié}\\ \text{Aucun être identique à moi n'est connaissant la pitié}\end{array}}{\text{Aucun être identique à moi n'est une bête}}$$

ou un Baroco :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Toute bête est connaissant la pitié}\\ \text{Quelque être identique à moi n'est pas connaissant la pitié}\end{array}}{\text{Quelque être identique à moi n'est pas une bête}}$$

La loi interdit les écoutes téléphoniques, car les écoutes téléphoniques sont une atteinte à la vie privée et la loi garantit la protection de la vie privée.

La conclusion est 'la loi interdit les écoutes téléphoniques' et les prémisses sont 'les écoutes téléphoniques sont une atteinte à la vie privée' et 'la loi garantit la protection de la vie privée'. Première analyse : S est 'loi', P est 'interdisant les écoutes téléphoniques', M est 'protégeant des atteintes à la vie privée'. 'Les écoutes téléphoniques sont une atteinte à la vie privée' se traduit par « Tout non P est non M », 'la loi garantit la protection de la vie privée' par « Tout S est M » et 'la loi interdit les écoutes téléphoniques' par « Tout S est P ». Après contraposition de la première prémisse, on se trouve en présence d'un Barbara. Deuxième analyse : S est 'écoute téléphonique', P est 'interdit par la loi', M est 'atteinte à la vie privée', on a à nouveau un Barbara.

Il est interdit aux étudiants en sciences de tricher aux examens. Or, les étudiants en philosophie ne sont pas des étudiants en sciences. Il n'est donc pas interdit aux étudiants en philosophie de tricher aux examens.

S = 'étudiant en philosophie', M = 'étudiant en sciences', P = 'individu à qui il est interdit de tricher'. Le raisonnement devient : Tout M est P. Or aucun S n'est M. Donc, on n'a pas que tout S est P. Par passage au contradictoire, on transforme la conclusion en « Quelque S n'est pas P ». Le résultat est :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tout } M \text{ est } P\\ \text{Aucun } S \text{ n'est } M\end{array}}{\text{Quelque } S \text{ n'est pas } P}$$

Ce syllogisme de la première figure, de mode AEO, ne satisfait pas à la règle du latius hos, car P est universel dans la conclusion et particulier dans la majeure.

Fumer détend. Le stress fait fumer. Donc, le stress détend.

Première analyse. M = 'action de fumer', P = 'activité qui détend', S = 'stress', N = 'faisant fumer'. Le raisonnement n'est pas un syllogisme, car il a quatre termes : le moyen est ambigu. Deuxième analyse. M = 'individu qui fume', P = 'individu détendu', S = 'individu stressé'. On a un Barbara avec une prémisse fausse. Troisième analyse. M = 'activité faisant fumer', P = 'activité qui cause une détente', S = 'stress'. On a à nouveau un Barbara.

Qui dit que vous êtes en Belgique dit la vérité. Qui dit que vous êtes à Liège dit que vous êtes en Belgique. Donc, qui dit que vous êtes à Liège dit la vérité.

Une première analyse, grossière, peut être faite en assimilant « qui dit que ... dit la vérité » à « ... » et « qui dit que ... dit que ... » à « si ... , alors ... » : S = 'identique à vous', M = 'étant en Belgique', P = 'étant à Liège'. On obtient un syllogisme qui ne satisfait pas à la règle du moyen terme :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tout } S \text{ est } M\\ \text{Tout } P \text{ est } M\end{array}}{\text{Tout } S \text{ est } P}$$

Pour une analyse plus fine, on pose : M = 'disant que vous êtes en Belgique', P = 'disant la vérité', S = 'disant que vous êtes à Liège'. Cela donne un Barbara :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tout } M \text{ est } P\\ \text{Tout } S \text{ est } M\end{array}}{\text{Tout } S \text{ est } P}$$

Les médiévaux, à la suite d'Aristote, ont résolu ce genre de paradoxe en distinguant les sens absolu (simpliciter) et relatif (secundum quid) de 'disant la vérité'. Dans un emploi absolu, 'disant la vérité' signifierait « qui dit habituellement, voire toujours, la vérité ». Cela correspond à l'analyse que nous venons de faire. À supposer que les prémisses du raisonnement soient vraies, la conclusion doit l'être aussi : même si vous n'êtes pas à Liège, celui qui dit que vous y êtes dit habituellement la vérité. Dans un emploi relatif, l'expression 'disant la vérité' est incomplète, car elle signifie « disant la vérité en disant que ... ». En ce cas, le majeur du syllogisme devient équivoque : 'disant la vérité' devant être remplacé par 'disant la vérité en disant que vous êtes en Belgique' dans la majeure et par 'disant la vérité en disant que vous êtes à Liège' dans la conclusion, et le raisonnement n'est plus un syllogisme, car il a plus de trois termes.

Enfin, une quatrième interprétation consisterait à choisir l'une des deux lectures *secundum quid*. Le raisonnement serait à nouveau concluant mais, par exemple, la conclusion devrait être comprise comme « qui dit que vous êtes à Liège dit la vérité, en disant que vous êtes en Belgique ».

6.3 Du bon usage des paralogismes

Les raisonnements non valides peuvent être utilisés à des fins rhétoriques ou sophistiques. Ils peuvent aussi être utilisés pour trouver des hypothèses, formuler des conjectures, renforcer une conviction.

On appelle 'paralogisme' ou 'sophisme' un raisonnement non valide. La distinction faite usuellement entre sophisme et paralogisme ne concerne pas la logique mais la rhétorique et la morale : un sophisme est un paralogisme proposé dans une mauvaise intention. Cette différence est du même type que celle de l'erreur et du mensonge. Les paralogismes les plus fréquents sont l'abduction et l'induction, ces paradigmes de la logique de la découverte. L'abduction est le syllogisme à la Sherlock Holmes, violant la règle du moyen terme :

$$\frac{\text{Tout } P \text{ est } M \qquad \text{Tout } S \text{ est } M}{\text{Tout } S \text{ est } P} \qquad \frac{\text{L'assassin a des moustaches vertes} \qquad \text{Paul a des moustaches vertes}}{\text{Paul est l'assassin}}$$

L'induction est le latius hos de la troisième figure :

$$\frac{\text{Tout } M \text{ est } P \qquad \text{Tout } M \text{ est } S}{\text{Tout } S \text{ est } P} \qquad \frac{\text{Platon, Aristote et Nietzsche savaient le grec} \qquad \text{Platon, Aristote et Nietzsche étaient de grands philosophes}}{\text{Les grands philosophes savaient le grec}}$$

Avec le présupposé d'existence, la règle du latius hos n'autorise que la conclusion d'un Darapti : 'Quelques grands philosophes savaient le grec'.

7 Limitations de la théorie

7.1 Limitations apparentes

On a déjà signalé que l'existence de certains jugements qui ne sont pas catégoriques à sujet général comme les jugements singuliers et infinis ne saurait constituer une véritable limitation.

Quoiqu'un syllogisme n'ait que deux prémisses, on peut cependant analyser des raisonnements comprenant un plus grand nombre de prémisses en enchaînant plusieurs syllogismes, la conclusion d'un syllogisme devenant prémisse du suivant. Un tel enchaînement est appelé **polysyllogisme** ou sorite.

Voici un exercice de Lewis Caroll :

Que peut-on déduire des affirmations suivantes ?

(1) Ces idées qui sont miennes, mais qui ne peuvent être exprimées sous forme de syllogisme sont vraiment ridicules ;
(2) Aucune de mes idées sur les cramiques ne mérite d'être mise par écrit ;
(3) Aucune de mes idées qui ne se réalise pas ne peut être exprimée sous forme de syllogisme ;
(4) Je n'ai jamais eu une idée vraiment ridicule que je n'ai pas transmise aussitôt à mon avocat ;
(5) Je ne rêve que de cramiques ;
(6) Je ne transmets jamais d'idée à mon avocat, à moins qu'elle ne mérite d'être mise par écrit.

En posant M = 'idée de moi non exprimable en syllogisme', C = 'idée de moi sur les cramiques', I = 'idée de moi qui se réalise', S = 'rêve de moi', R = 'idée de moi vraiment ridicule', T = 'idée de moi transmise à mon avocat', N = 'idée de moi méritant d'être notée', on obtient :

(1) Tout M est R ;
(2) Aucun C n'est N ;
(3) Aucun non I n'est non M ;
(4) Aucun R n'est non T ;
(5) Tout S est C ;
(6) Tout T est N.

On transforme (3) et (4), par obversion, en « Tout non I est M » et « Tout R est T », ce qui fait apparaître sept termes, et on désigne 'non I' par P. En enchaînant trois Barbara, un Camestres et un Celarent, on a :

$$\begin{array}{c}
\text{Tout } T \text{ est } N \ (6) \\
\text{Tout } R \text{ est } T \ (4) \\
\hline
\text{Tout } R \text{ est } N \\
\text{Tout } M \text{ est } R \ (1) \\
\hline
\text{Tout } M \text{ est } N \\
\text{Tout } P \text{ est } M \ (3) \\
\hline
\text{Tout } P \text{ est } N \\
\text{Aucun } C \text{ n'est } N \ (2) \\
\hline
\text{Aucun } C \text{ n'est } P \\
\text{Tout } S \text{ est } C \ (5) \\
\hline
\text{Aucun } S \text{ n'est } P
\end{array}$$

La conclusion « Aucun S n'est P » est une traduction de 'Aucun de mes rêves n'est non réalisé', c'est-à-dire 'Tous mes rêves se réalisent'.

7.2 Limitations réelles

La logique des syllogismes ne permet pas de rendre compte des raisonnements comportant des énoncés complexes, ni des raisonnements qui font intervenir des relations ou des fonctions. Les raisonnements avec énoncés complexes ont été étudiés par les logiciens stoïciens. Les formes les plus courantes sont le **modus ponens** :

$$\frac{\text{S'il pleut, il fait mauvais} \quad \text{Il pleut}}{\text{Il fait mauvais}}$$

et le **modus tollens** :

$$\frac{\text{S'il pleut, il fait mauvais} \quad \text{Il ne fait pas mauvais}}{\text{Il ne pleut pas}}$$

Il faut noter toutefois que ces raisonnements sont analysables en syllogismes :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Toute situation pluvieuse est une situation (climatiquement) mauvaise}\\ \text{Toute situation identique à la situation présente est une situation pluvieuse}\end{array}}{\text{Toute situation identique à la situation présente est une situation mauvaise}}$$

Cependant, une telle analyse, qui réduit les relations entre énoncés à des relations entre propriétés, manque de subtilité et n'est pas généralisable.

Aussi, quand on combine ces sortes de raisonnements avec les syllogismes, comme l'ont fait beaucoup de médiévaux, on obtient une logique sensiblement plus souple et plus riche.

Les modernes ont senti la limitation de la théorie des syllogismes lorsqu'on se trouve en présence de relations. Par exemple, les raisonnements suivants proposés par Jungius et Leibniz ne se laissent pas analyser en syllogismes ou inférences immédiates :

$$\frac{\text{Tout cercle est une figure}}{\text{Qui dessine un cercle dessine une figure}}$$

$$\frac{\text{Jésus-Christ est Dieu}}{\text{La mère de Jésus-Christ est la mère de Dieu}}$$

8 Démonstration des règles

Nous allons démontrer, en guise d'exercice, les règles générales. La méthode que nous utiliserons est celle des contre-modèles ou contre-exemples. Pour montrer qu'une règle est valable, nous montrerons qu'un syllogisme qui ne respecte pas cette règle est non valide. Pour montrer qu'un syllogisme est non valide, nous décrirons un exemple ou « modèle » dans lequel les prémisses du syllogisme sont vraies et la conclusion fausse. Ce contre-modèle sera décrit en associant à chaque terme du syllogisme un ensemble non vide (pour tenir compte du présupposé d'existence) et en donnant aux expressions logiques ('tout', 'quelque'...) leur sens standard.

Un modèle $\mathcal{M}$ est constitué d'un ensemble non vide $|\mathcal{M}|$ et d'une interprétation qui associe à chaque terme T un sous-ensemble non vide $T_{\mathcal{M}}$ de $|\mathcal{M}|$. En notant $\mathcal{M} \models A$ le fait que l'énoncé A est vrai dans le modèle $\mathcal{M}$, la vérité d'un énoncé dans un modèle est définie comme suit :
$\mathcal{M} \models$ Tout S est P ssi l'ensemble $S_{\mathcal{M}}$ est inclus dans $P_{\mathcal{M}}$;
$\mathcal{M} \models$ Aucun S n'est P ssi l'ensemble $S_{\mathcal{M}}$ est disjoint de $P_{\mathcal{M}}$;
$\mathcal{M} \models$ Quelque S est P ssi les ensembles $S_{\mathcal{M}}$ et $P_{\mathcal{M}}$ ont au moins un élément commun ;
$\mathcal{M} \models$ Quelque S n'est pas P ssi l'ensemble $S_{\mathcal{M}}$ a au moins un élément non dans $P_{\mathcal{M}}$.

Pour uniformiser les démonstrations, nous introduisons les notations :
$R_{\mathcal{M}} \subset T_{\mathcal{M}}$ ssi $R_{\mathcal{M}}$ est strictement inclus dans $T_{\mathcal{M}}$;
$R_{\mathcal{M}} \perp T_{\mathcal{M}}$ ssi $R_{\mathcal{M}}$ et $T_{\mathcal{M}}$ sont disjoints ;
$R_{\mathcal{M}} \cup T_{\mathcal{M}}$ est la réunion des ensembles $R_{\mathcal{M}}$ et $T_{\mathcal{M}}$.
et nous utiliserons les faits suivants :
si $R_{\mathcal{M}} \subset T_{\mathcal{M}}$, tout énoncé en R et T dans lequel T est particulier est vrai dans $\mathcal{M}$;
si $R_{\mathcal{M}} \subset T_{\mathcal{M}}$, tout énoncé en R et T dans lequel T est universel est faux dans $\mathcal{M}$;
si $R_{\mathcal{M}} \perp T_{\mathcal{M}}$, tout énoncé négatif en R et T est vrai dans $\mathcal{M}$;
si $R_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}}$, tout énoncé affirmatif en R et T est vrai dans $\mathcal{M}$.

Démonstration de R_{mt}. Supposons que le moyen terme soit pris particulièrement dans les deux prémisses. La conclusion ne peut être négative, car si $S_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} \subset M_{\mathcal{M}}$, les prémisses sont vraies et la conclusion fausse dans $\mathcal{M}$. La conclusion ne peut pas non plus être affirmative, car si $S_{\mathcal{M}} \perp P_{\mathcal{M}}$ et $M_{\mathcal{M}} = S_{\mathcal{M}} \cup P_{\mathcal{M}}$, les prémisses sont encore vraies et la conclusion fausse (dans $\mathcal{M}$).

Démonstration de R_{lh}. Soient R, T, les termes de la conclusion du syllogisme. Supposons que T soit universel dans la conclusion et particulier dans la prémisse correspondante. Si l'autre prémisse est affirmative, on prend un $\mathcal{M}$ tel que $R_{\mathcal{M}} = M_{\mathcal{M}} \subset T_{\mathcal{M}}$. Si elle est négative, on prend un $\mathcal{M}$ tel que $M_{\mathcal{M}} \perp R_{\mathcal{M}}$ et $T_{\mathcal{M}} = M_{\mathcal{M}} \cup R_{\mathcal{M}}$. Dans les deux cas les prémisses sont vraies et $R_{\mathcal{M}} \subset T_{\mathcal{M}}$. La conclusion est donc fausse dans $\mathcal{M}$.

Démonstration de R_{nn}. Si la conclusion est affirmative, on prend un $\mathcal{M}$ tel que $S_{\mathcal{M}} \perp P_{\mathcal{M}}$, $S_{\mathcal{M}} \perp M_{\mathcal{M}}$ et $P_{\mathcal{M}} \perp M_{\mathcal{M}}$. Si la conclusion est négative, on prend $S_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$ et $S_{\mathcal{M}} \perp M_{\mathcal{M}}$.

Démonstration de R_{n}. Comme une des prémisses au moins est affirmative (R_{nn}), on peut prendre un $\mathcal{M}$ tel que $S_{\mathcal{M}} \perp P_{\mathcal{M}}$ et $M_{\mathcal{M}} = S_{\mathcal{M}}$ ou $M_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$, selon que c'est la majeure ou la mineure qui est négative.

Démonstration de R_{aa}. Si les prémisses sont affirmatives et la conclusion négative, on prend $\mathcal{M}$ tel que $S_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} = M_{\mathcal{M}}$.

Exercice. *Existe-t-il des raisonnements intuitivement valides qui se sont pas des syllogismes, mais qui sont néanmoins formés de deux prémisses et d'une conclusion catégoriques ? Plus précisément, existe-t-il des raisonnements intuitivement valides de la forme $X, Y \vdash Z$, qui ne sont pas des syllogismes, bien que X, Y et Z soient des énoncés A, E, I ou O ?*

Plan